

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES
Y PUERTOS**
ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2º CURSO Y ADAPTACIÓN 2010/2011
PRÁCTICA 5

1.

(i). Clasificar los siguientes sistemas en lineales o no lineales, homogéneos o no homogéneos, de primer orden o de orden superior.

$$\text{a) } \begin{cases} (D^2 - 2)y_1 - 3y_2 = e^{2x} \\ (D^2 + 2)y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{cases} y_1' = \frac{y_2^2}{y_1} \\ y_2' = \frac{y_1^2}{y_2} \end{cases}$$

(ii). Expresar en forma matricial el sistema lineal asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea $y'''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

(iii). Calcular una ecuación diferencial de orden dos asociada al sistema $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y comprobar que tiene soluciones que no son soluciones del sistema.

(iv). Obtener una ecuación diferencial de segundo orden asociada al sistema $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$, y a partir de sus soluciones resolver el sistema:

2.

(i). Comprobar que $\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & -xe^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix}$ y $\Phi_2(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} + xe^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & e^{2x} - xe^{2x} \end{pmatrix}$ son matrices fundamentales del sistema: $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

(ii). Dada la matriz $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & 3e^x \\ e^{2x} & 2e^x \end{pmatrix}$ encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales para el que $\Phi(x)$ sea una matriz fundamental.

(iii). Demostrar que si $z_1 = (a + i \cdot b) \cdot e^{(\alpha + \beta i)x}$ y $z_2 = (a - i \cdot b) \cdot e^{(\alpha - \beta i)x}$ son soluciones complejas linealmente independientes de un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales entonces:

$$y_1 = \text{Real}((a + b \cdot i) e^{(\alpha + \beta i)x})$$

$$y_2 = \text{Im}((a + b \cdot i) e^{(\alpha + \beta i)x})$$

son soluciones reales del sistema linealmente independientes.

3

Resolver los sistemas siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases} & \text{(ii)} \begin{cases} y'' - 4z = 0 \\ z'' + 4y = 0 \end{cases} & \text{(iii)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases} \\
 \text{(iv)} \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 9z \\ \frac{dz}{dx} = y + 8z \end{cases} & \text{(v)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases} & \text{(vi)} \begin{cases} y' + y + 2z = \cos x + \operatorname{sen} x \\ z' + 2y + z = \operatorname{sen} x - \cos x \end{cases} \\
 \text{(vii)} \begin{cases} y' + z' + 2y + z = x \\ z' + 5y + 3z = x^2 \end{cases} & \text{(viii)} \begin{cases} y' - z' - z = e^x \\ z' + y - z = e^{2x} \end{cases} &
 \end{array}$$

4.

Resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{x^3} & -\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x} \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \log x \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5.

- (i) (a) Determinar los valores que puede tomar el número real α para que el sistema: $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + \alpha y_2 \end{cases}$, tenga soluciones de la forma: $y_1 = (ax + b)e^{rx}$, $y_2 = (cx + d)e^{rx}$, para algunos números reales a, b, c, d y r , con $a^2 + c^2 \neq 0$.

- (b) Resolver el sistema en el caso: $\alpha = 6$.

- (ii) Resolver el sistema: $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + \frac{1}{x} \\ y_2' = y_1 - y_2 + \frac{2}{x} \end{cases}$

6.

- i) Hallar la solución de $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x \\ \cos x \end{pmatrix}$ tal que $\begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{matrix}$, por el método de variación de las constantes.
- i) Hallar la solución de $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$ con $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por el método de los coeficientes indeterminados.

7.

- (i) Si A es una matriz cuadrada 3×3 , constante, cuya traza es -7 , cuyo determinante es -8 y si sabemos que -2 es un autovalor de A , ¿qué podemos decir del límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x)$ siendo $Y(x)$ una solución del sistema $Y' = AY$?
- (ii) Del sistema $\vec{y}' = A\vec{y}$, A matriz constante 4×4 , se sabe que tiene cuatro soluciones $\vec{y}$ cuyas componentes son: $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = y_1'$, $y_3 = y_2'$ e $y_4 = y_3'$, siendo r cada una de las raíces cuartas de 7 . Se pide: calcular A .

Sugerencia: No son precisas operaciones complicadas.

8.

- (i) Hallar la solución de $\begin{cases} y_1' + 3y_1 + y_2 = 0 \\ 2y_1' + y_2' - 4y_1 - y_2 = e^x \end{cases} ; \begin{cases} y_1(0) = -\frac{1}{2} \\ y_2(0) = 6 \end{cases}$.

- (ii) Obtener la solución de $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2y_2 - y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 - y_1 \end{cases}$ con $\vec{y}(0) = (2, 3, 4)$

- (iii) Obtener la solución general del sistema: $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -4 & -13 & 10 \\ -4 & -12 & 9 \end{pmatrix} \vec{y} + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- (iv) Obtener la solución general del sistema: $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ -4 & 3 & 4 \\ 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- (v) (a) Encontrar sendas matrices fundamentales para los sistemas:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}, \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

- (b) Resolver: $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- (vi) Obtener la solución general del sistema: $\vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- (vii) Obtener la matriz fundamental Φ del sistema: $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$, tal que $\Phi(0) = I_d \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.

Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

$$\begin{aligned} (P_1) \begin{cases} \vec{y}' = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 10e^x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} & \quad (P_2) \begin{cases} \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} x \\ 3e^{-3x} \end{pmatrix} \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} \\ (P_3) \begin{cases} \vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 16x \end{pmatrix} \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} & \quad (P_4) \begin{cases} \vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

10.

Dado el sistema: $(S) \begin{cases} y_1' = \alpha y_1 + 2y_2 + 1 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 - 1 \end{cases}$

- (i) Hallar el coeficiente α para que el sistema (S) tenga soluciones polinómicas de primer grado.
- (ii) Determinar dichas soluciones polinómicas.
- (iii) Comprobar que ninguna de las soluciones obtenidas en (ii) puede satisfacer a las condiciones del problema de valor inicial $y_1(0) = y_2(0) = 1$.
- ¿ Contradice esta observación al teorema de existencia y unicidad ? ¿ Por qué ?